数理解析研究所講究録
297巻 1977年 141-146

小林氏の問題について

神戸大・教養　池田裕司
東洋大・工　山下正勝

§1. 序

小林一章氏は「$b(M)=3$ なる4次元PL閉多様体 M^4 は homology と向き付け可能性でどこまで分類できるか」という問題を提起された。もしも「そのような M^4 は (PL同相の意味で) 一意である」ことが分かれば最終的な分類を得たことになる。$b(M)$ の正確な定義は [1] を参照して欲しいが、乱暴に言えば「M を cover するのに必要な 4-balls の最小数」のことである。$b(M)=3$ なる4次元閉多様体 M^4 には、$b(W)=2$ なる4次元多様体 W^4, $\dot{W}^4 \neq \emptyset$, が

$$W^4 = M^4 - \mathring{B}^4, \quad B^4 \text{ は } M^4 \text{ 内の 4-ball},$$

という相互関係によって、1対1に対応する。ここでは次の4つの条件：

(1)　$b(W)=2$,

(2)　$\dot{W} = S^3$,

(3) $H_1(\overline{W}) = p\mathbb{Z}$,

(4) $H_2(\overline{W}) = \mathbb{Z}$

を満足する connected compact bounded PL 4-manifold $\overline{W}^4$ の全体 $\overline{C}(p,1)$ について知り得た結果を報告する．主な結果は次の2つである．

定理1．$\overline{W}_p \in \overline{C}(p,1)$ の内部から 4-ball D^4 の内部を取り除き，2つの 3-spheres $\dot{D}^4$ と $\dot{\overline{W}}_p$ を 1-handle $I \times D^3$ でつないで得られる $\overline{W}_{p+1}$，すなわち，

$$\overline{W}_{p+1} = (\overline{W}_p - \mathring{D}^4) \cup I \times D^3$$

$$\text{such that} \quad (\overline{W}_p - \mathring{D}^4) \cap (0,1) \times D^3 = \emptyset,$$
$$\dot{D}^4 \supset 0 \times D^3,$$
$$\dot{\overline{W}}_p \supset 1 \times D^3$$

は $\overline{C}(p+1,1)$ の元である．逆に $\overline{C}(p+1,1)$ のすべての元は $\overline{C}(p,1)$ の或る元から上のようにして作られる．

定理2．任意の多様体 $\overline{W}_p \in \overline{C}(p,1)$，$p \geq 0$，は

$$(S^1_1 \vee \cdots \vee S^1_p) \vee S^2 \vee (S^3_1 \vee \cdots \vee S^3_p)$$

の形の spine を持つ．

以下でこれらの定理を示す手順の概要を述べる．

§2. Key Theorem.

$\overline{W} \in \overline{C}(p,1)$は2つの4-balls A, Bで

$$\overline{W} = A \cup B,$$
$$A \cap B = \dot{A} \cap \dot{B} = 3次元多様体$$

とあらわされる. このとき3次元多様体

$$F = A \cap B$$

は$(p+1)$個の連結成分$F_0, F_1, \cdots, F_p$で

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_p$$

とあらわされる. $(A, B; F)$を$\overline{W}$の実現と呼ぶことにしよう. p個のF_i $(i \neq 0)$は何れも3-ballから何個かの小さい3-ballsを取り除いたものである. F_0の形はすぐには分らないが, その境界$\dot{F}_0$の形は唯1個のtorus $S^1 \times S^1$と何個かの2-spheresの和で

$$\dot{F}_0 = S^1 \times S^1 + (S_0^2 + \cdots + S_r^2)$$

とあらわされることが分かる. 但しrは0かも知れない. 実を言うと, $r \geq 1$であって欲しいのだが, 勝手に$\overline{W}$の実現を取るとそうはならない.

$\dot{\overline{W}} = S^3$だから$\overline{W}$に4-ball Cをはりつけた4次元閉多様体$\hat{W}$を考える. すなわち

$$\hat{W} = A \cup B \cup C, \quad \overline{W} \cap C = \dot{\overline{W}} = \dot{C}.$$

そのとき $\overline{W}$ の実現として

$$(A, B; A\cap B),\quad (B, C; B\cap C),\quad (C, A; C\cap A)$$

の3つが自然に考えられる。この3つのうち1つが我々の望む条件"$r \geq 1$"を保障してくれる。

さて再び実現 $(A, B; F)$ について話を進めよう。F_0 は connected で $F_0 \subset S^3$ (=たとえば $\dot{A}$) であるから F_0 は knot の exterior から r 個の3-balls を取り除いたものである。いまこの取り除かれた3-balls をそっくりそのまま埋め直したものを $\hat{F}_0$ とする。すなわち、

$$\hat{F}_0 = F_0 \cup (D_1^3 + \cdots + D_r^3),$$

$$F_0 \cap D_j = S_j^2, \quad D_i \cap D_j = \phi \ (i \neq j)$$

である。そのとき $\hat{F}_0$ は knot の exterior そのものである。この $\hat{F}_0$ が trivial knot の exterior (すなわち solid torus) であれば都合がよいが一般には分らない。ところが先程の $\overline{W}$ の3つの実現

$$(A, B; A\cap B),\quad (B, C; B\cap C),\quad (C, A; C\cap A)$$

のうちから好都合なものを捜しだすことができる。すなわち

Key Theorem. $\overline{W} \in \mathcal{T}(p, 1)$, $p \geq 1$, の実現 $(A, B; F)$ として、$r \geq 1$ かつ $\hat{F}_0$ が (3-sphere $\dot{A}$ の中で trivial な)

solid torus であるようなものがとれる.

この結果から homology の rank 等を調べることにより, F_i $(i=1,\cdots,p)$ のうちの1つ, たとえば F_p, が 3-ball そのものであることが分かる. この 3-ball F_p を用いて $\overline{W}$ を surgery すれば $\overline{W}_{p-1} \in \overline{C}(p-1,1)$ が得られる. その手順を次で示そう.

§3. $\overline{W}_p \in \overline{C}(p.1)$ の surgery.

今までの $\overline{W} \in \overline{C}(p.1)$ をこゝでは $\overline{W}_p$ と書くことにする. $(A, B; F)$ を F_p が 3-ball であるような $\overline{W}_p$ の実現とする. そのとき

$$\overline{V} = \overline{\overline{W}_p - N(F_p, \overline{W}_p)}$$

を考える. こゝに $N(F_p, \overline{W}_p)$ は F_p の $\overline{W}_p$ での正則近傍である. $\dot{\overline{V}}$ は丁度2つの 3-spheres から成り立っていることが (3,2)-Schoenflies Th. から分かるから, そのうちの1つに 4-ball D^4 を attach してふさいでしまう. すなわち,

$$\overline{W}_{p-1} = \overline{V} \cup D^4,$$
$$\overline{V} \cap D^4 = \dot{\overline{V}} \cap \dot{D}^4 = 3\text{-sphere}.$$

そのとき $\overline{W}_{p-1} \in \mathcal{C}(p-1, 1)$ であることが分かる．この操作を逆に見てゆけば冒頭で述べた2つの定理が得られる．

文献

[1] Kobayashi, K. and Tsukui, Y., The ball coverings of manifolds, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976) 133-143.